

# 1. СПЕЦИАЛИЗИРОВАННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТЕХНОЛОГИЯ PostScript

## §1. Предназначение и базовые возможности технологии PostScript. Вычисления и вывод данных

**Введение.** Язык PostScript – это простой интерпретируемый язык программирования с мощными графическими возможностями. Его главным предназначением является описание внешнего вида текста, геометрических фигур и точечных изображений на печатаемых или отображаемых на экране страницах. Описание является высокоуровневым и аппаратно-независимым.

Описания страниц и интерактивные графические возможности языка PostScript включают следующие характеристики, которые могут использоваться в любых сочетаниях:

- из отрезков прямых линий, дуг окружностей и эллипсов, прямоугольников и кубических кривых могут составляться произвольные фигуры; они могут быть самопересекающимися, содержать несоединенные секции и пустые промежутки;
- операторы прорисовки позволяют фигурам быть очерченными линиями любой толщины, залитыми любым цветом или быть использованными в качестве клиповых областей для помещения любой другой графики; цвета могут быть заданы различными способами: как градации серого или с использованием их спецификаций в цветовых моделях RGB, CMYK и CIE; имеется также ряд других возможностей, реализуемых цветовыми эффектами специального рода: повторяющиеся шаблоны, цветовые маски, выделения и тому подобное;
- текст полностью интегрирован с графикой; графическая модель языка PostScript и в стандартных, и в определенных пользователем шрифтах текстовые символы рассматривает как графические образы, которыми можно оперировать с помощью графических операторов;
- в документ могут помещаться точечные изображения: как полученные из естественных источников (такие, как сканированные или цифровые фотографии), так и сгенерированные синтетически; на языке PostScript можно описывать точечные изображения любого разрешения в соответствии с различными цветовыми моделями; программисту предоставляется целый ряд способов управления репродукцией изображений устройствами вывода;
- поддерживаются любые комбинации линейных преобразований системы координат, в которой описываются все графические образы, включая параллельный перенос, масштабирование, поворот, зеркальное отражение и аффинное искажение; эти преобразования применяются единообразно ко всем элементам страницы, включая текст, геометрические фигуры и точечные изображения.

Описание страницы на языке PostScript может быть обработано принтером, экраным или другим выводным устройством с помощью PostScript-интерпретатора, управляющего этим аппаратом. Когда интерпретатор выполняет команды по прорисовке символов, геометрических фигур и точечных изображений, он преобразует высокоуровневое

описание на языке PostScript в данные низкоуровневого растрового формата, понятного конкретному устройству.

Описания страниц на языке PostScript могут генерироваться автоматически прикладными программами: системами составления документов, иллюстраторами и компьютерно-реализованными дизайнерскими системами. В этих случаях программисты пишут программы на языке PostScript только тогда, когда разрабатывается новое приложение указанного выше рода. Тем не менее, в некоторых ситуациях программисты предпочитают лично писать PostScript-программы, чтобы воспользоваться теми преимуществами технологии PostScript, которые недоступны при использовании прикладных программ.

Широкие графические возможности языка PostScript вставлены в рамки языка программирования общего назначения. Этот язык содержит привычный набор типов данных (числовые типы, массивы и строки), управляющие структуры (ветвления, циклы и процедуры) и некоторые нетривиальные концепты (например, словари). Используя названные возможности, программист может определять собственные имена данных и высокоуровневые операции, наиболее полно соответствующие логике работы разрабатываемых приложений, создавая таким образом для каждого конкретного приложения наиболее соответствующий его целям и задачам алгоритмический язык. Такие задачно-ориентированные описания оказываются более ясными, четкими и проще генерируют интерпретируемый в конечном итоге код, чем их громоздкие аналоги, представленные непосредственно в терминах фиксированного набора базовых операций.

Программы на языке PostScript могут создаваться, передаваться и интерпретироваться в форме текста, представленного с помощью кодировки ASCII. Весь язык PostScript может быть описан в терминах печатных и пробельных символов. Такое представление приемлемо для людей-программистов при создании, модифицировании и понимании текстов программ. Также этим поддерживается возможность сохранения программ и их передачи между различными компьютерами и операционными системами, обеспечивающая их платформенную независимость.

1. Напишите на языке PostScript программу, которая выводит на одной строке числа 1, 13 и 49, используя в качестве символа-разделителя пробел.

2. Создайте PostScript-программу, выводящую числа 5, 10 и 21 одно под другим. Для вывода всех чисел используйте шрифт одной и той же гарнитуры. Размер шрифта возьмите равным 14-ти типографским пунктам, межстрочный интервал сделайте полуторным, то есть равным 21-му типографскому пункту.

3. Напишите на языке PostScript программу, в коде которой определяются неотрицательные значения переменных  $x$  и  $y$ . Программа должна вычислить значение выражения  $-5\sqrt{x+\sqrt{y}}$  и сообщить пользователю, какие входные значения переменных были заданы и какое значение выражения получено.

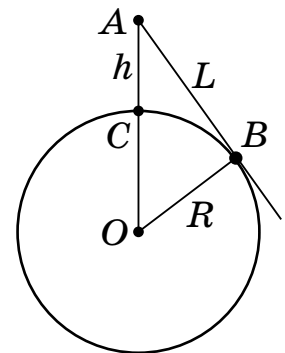
4. На языке PostScript напишите программу, в коде которой определяется значение переменной  $x$ , не меньшее единицы. Программа должна вычислить значение следующего выражения:

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}}.$$

Затем программа должна сообщить пользователю, какое значение переменной  $x$  было задано и какое значение выражения получено.

5. Разработайте PostScript-программу, находящую решение линейного алгебраического уравнения с одной неизвестной вида  $ax+b=0$ , в котором  $a$  и  $b$  – параметры, значения которых задаются в начале кода программы, а  $x$  – неизвестная. Программа должна найти удовлетворяющее уравнению значение неизвестной (если оно при заданных значениях параметров существует), а затем сообщить пользователю, какие значения параметров были заданы и какое решение уравнения получено.

6. На языке PostScript разработайте программу, вычисляющую расстояние  $L$  от глаз наблюдателя  $A$  до линии видимого горизонта  $B$ . Наблюдатель находится на высоте  $h$  над уровнем моря  $C$ . Землю считайте идеальным шаром, радиус которого  $R \approx 6350$  км. Значение высоты  $h$  в метрах задается пользователем в начале кода программы. Вычислив значение  $L$  в километрах, программа должна построить чертеж, воспроизводящий тот, который приведен на рисунке справа. На чертеже программа должна отобразить введенное пользователем значение высоты  $h$  и вычисленное ею значение расстояния  $L$  с указанием для каждой из названных величин рекомендованных условием задачи единиц измерения.



7. За то время, которое прошло с начала суток, часовая стрелка повернулась на некоторый угол  $\alpha$ , но еще не совершила ни одного полного оборота. Значение угла  $\alpha$  в градусах задается пользователем в начале кода PostScript-программы. Программа должна вычислить, сколько полных часов и сколько полных минут прошло с начала суток и сообщить о результатах вычислений пользователю. Рядом с текстом сообщения должен быть помещен рисунок, представляющий соответствующее текущему моменту времени расположение стрелок часов на фоне циферблата.

8. Идет  $n$ -й день 2021-го года. Значение переменной  $n$  задается пользователем в начале кода PostScript-программы. Программа должна вычислить и сообщить пользователю, какой (по названию, а не по номеру) идет месяц, какой (по номеру) идет день месяца и какой (по названию, а не по номеру) идет день недели. Также программа должна указать, какой номер дня и в каком году рассматривается. Например, если пользователь задаст  $n=43$ , то программа может вывести: *12 февраля 2021-го года, пятница, 43-й день года.*

9. Симметрично-пороговая функция обозначается  $\sigma_s(n)$  и задается формулой:

$$\sigma_s(n) = \begin{cases} -1, & n < 0, \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

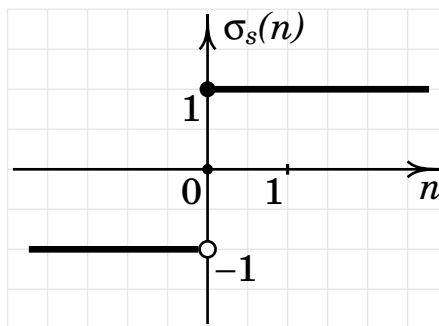
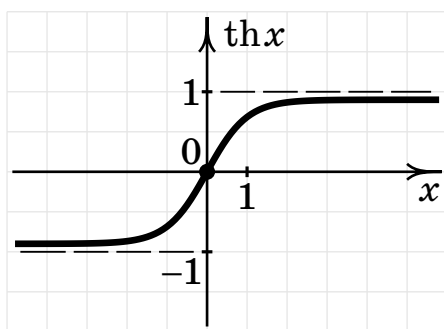


График этой функции приведен на рисунке справа. Напишите PostScript-программу, в начале кода которой пользователем задается произвольное (не обязательно натуральное) значение переменной  $n$ . Программа должна воспроизвести график симметрично-пороговой функции, выписать формулу, которой эта функция задается, и сообщить, какое значение она принимает при том значении аргумента  $n$ , которое задал пользователь.



10. Гиперболический тангенс – это функция, весьма широко используемая в самых разных областях математики, механики и информатики, в том числе – в нейроинформатике. Гиперболический тангенс обозначается  $\text{th}x$  и задается формулой:

$$\text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

График этой функции приведен на рисунке слева. Напишите на языке PostScript программу, в начале кода которой предусмотрите для пользователя возможность задать произвольное действительное значение для переменной  $x$ . Программа должна воспроизвести график гиперболического тангенса, выписать формулу, которой задается эта функция, и вывести ее значение, отвечающее заданному пользователем значению аргумента.

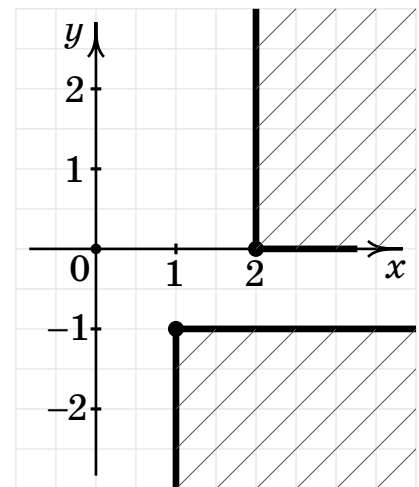
11. Разработайте PostScript-процедуру `testfont`, для которой вызов вида `fname x y sz testfont` приводил бы к тому, что текущим становился бы шрифт гарнитуры `fname` высотой `sz` пунктов, перо перемещалось бы в точку с абсциссой `x` и ординатой `y`, а затем отобража-

лись бы все 256 символов указанного шрифта по 8 в ряд (всего 32 ряда). Изображение каждого символа должно предваряться представлением соответствующего байта в десятичной системе счисления. Напишите затем программу, в которой вызывается и выполняется разработанная Вами процедура `testfont`.

## §2. Реализация технологией PostScript идей структурного программирования. Управляющие структуры и подпрограммы

12. Разработайте PostScript-программу, которая вычисляет значение предложенного логического выражения для всех возможных наборов значений логических переменных и строит соответствующую таблицу истинности. Логическое выражение таково:  $\neg(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg z)$ .

13. На языке PostScript напишите программу, которая в начале своего кода дает пользователю возможность задать действительные значения переменных  $x$  и  $y$ . Затем программа воспроизводит чертеж, приведенный на рисунке справа, и сообщает, попадает ли точка с координатами  $(x; y)$  в заштрихованную на чертеже область (включая границы). Например, если пользователь положит  $x=3$  и  $y=-2,5$ , то сообщение программы может быть таким: *точка  $(3; -2,5)$  попадает в заштрихованную на чертеже область (включая границы)*.



14. На языке PostScript напишите программу, которая в начале своего кода дает пользователю возможность задать действительные значения переменных  $v_1$  и  $v_2$ . Значение переменной  $v_1$  должно быть неотрицательным, оно трактуется как величина модуля скорости некоторого первого тела, представленная в сантиметрах в минуту. Значение переменной  $v_2$  также должно быть неотрицательным, оно трактуется как величина модуля скорости гипотетического второго тела, представленная в километрах в час. Программа должна перевести каждую из величин модуля скорости в метры в секунду и сообщить, модуль скорости какого из тел больше (или, быть может, что они одинаковы).

15. Светофор для пешеходов работает в следующем режиме: в начале каждого часа в течение трех минут горит зеленый фонарь, затем в течение двух минут – красный, в течение следующих трех минут снова горит зеленый фонарь, затем опять – красный и так далее. Разработайте PostScript-программу, которая в начале своего кода дает пользователю возможность задать действительное неотрицательное значение переменной  $t$ , трактуемое как время, прошедшее с начала текущего часа, измеренное в минутах. Если заданное пользователем значение будет некорректным, программа должна сообщить об этом. Если же значение корректно, программа должна сообщить, что со светофором происходит в указанный момент времени: горит зеленый фонарь, горит красный фонарь, как раз происходит переключение с зеленого на красный или как раз происходит переключение с красного на зеленый.

16. В некоторых странах Дальнего Востока (Китае, Японии и других) использовался (и неофициально используется в настоящее время) свое-

образный календарь, представляющий собой 60-летнюю циклическую систему. Каждый 60-летний цикл состоит из пяти 12-летних подциклов. В каждом подцикле годам присваиваются имена животных: Крысы, Коровы, Тигра, Зайца, Дракона, Змеи, Лошади, Овцы, Обезьяны, Петуха, Собаки и Свиньи. Кроме того, в именах годов животным приписываются цвета, ассоциирующиеся с пятью элементами природы – Деревом (зеленый), Огнем (красный), Землей (желтый), Металлом (белый) и Водой (черный). В результате каждое животное (и его год) имеет символический цвет, причем часто он совсем не совпадает с «естественной» окраской этого животного: Тигр может быть Черным, Свинья иногда оказывается Красной, а Лошадь – Зеленой. Например, 1984 год (первый год очередного 60-летнего цикла) был годом Зеленой Крысы. Каждый цвет «действует» два года, поэтому цвет повторяется через 10 лет. Поскольку животное повторяется через 12 лет, а наименьшее общее кратное чисел 10 и 12 равно 60, через каждые 60 лет точно повторяется имя года (и животное, и цвет).

На языке PostScript напишите программу, которая в начале своего кода позволяет пользователю ввести натуральное число – порядковый номер года нашей эры. Затем программа должна вывести номер этого года и его имя по вышеописанному календарю. Например, если пользователь введет число 1986, программа может вывести: *1986-й год является годом Красного Тигра.*

17. Траектория движения снаряда, вылетающего из орудия под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью, модуль которой равен  $v_0$ , при пренебрежении сопротивлением воздуха задается параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

В этих уравнениях  $g \approx 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$  – ускорение свободного падения, а  $t$  – время, прошедшее с момента выстрела.

Напишите PostScript-программу, которая в начале своего кода дает пользователю возможность задать значения  $\alpha$  (в градусах) и  $v_0$  (в метрах в секунду), а затем определяет, поразит ли снаряд цель высотой  $P$ , расположенную в вертикальной плоскости ствола орудия на высоте  $H$  над горизонтом на расстоянии  $R$  от места выстрела. Значения  $R$ ,  $H$  и  $P$  задаются пользователем в начале кода программы. Схема эксперимента представлена чертежом на рисунке справа. Программа должна воспроизвести чертеж, указав на нем введенные пользователем значения параметров и показав соответствующую им траекторию движения снаряда. Также программа должна кратко сообщить результат стрельбы по цели: цель поражена или цель не поражена.

*Продолжение следует: будет завершено условие задачи 17, добавлены к параграфу 2 задачи 18-22, добавлен параграф 3, содержащий задачи 23-33.*

## 2. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТЕХНОЛОГИЯ Java

### §4. Сущность технологии Java. Разработка консольных приложений к операционной системе персонального компьютера

**34.** Разработайте программу, которая выводит на экран матрицу, содержащую три строки и четыре столбца. Элементы матрицы выберите по своему усмотрению.

**35.** Разработайте программу, которая просит пользователя ввести строку и затем выводит эту строку на экран. Например, если пользователь введет *Hello*, на экран должно быть выведено: *Вы ввели "Hello"*.

**36.** Разработайте программу, которая просит пользователя ввести действительное число  $t^\circ$ , понимаемое как значение температуры в градусах Цельсия. Если введенное пользователем значение некорректно, программа должна сообщить об этом. Если значение корректно, то программа должна вычислить и сообщить, каким значениям по шкале Фаренгейта и шкале Кельвина соответствует введенное пользователем значение температуры в градусах Цельсия. Для перевода в шкалу Фаренгейта можно использовать формулу  $t^F = 1,8t^\circ + 32$ . Для шкалы Кельвина формула перевода такова:  $T = t^\circ + 273,15$ .

**37.** Разработайте программу для решения алгебраических уравнений вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – параметры, действительные значения которых вводятся пользователем, а  $x$  – неизвестная. Разработанная Вами программа должна вывести значения всех действительных корней уравнения, если они существуют, или сообщить о том, что корней нет.

**38.** Программа должна вычислять сумму  $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ . Произвольное действительное значение  $q$  и натуральное значение  $n$  вводятся пользователем. Разработайте такую программу.

**39.** Разработайте консольную программу, которой пользователь при запуске в командной строке передает два аргумента, представляющие собой корректные десятичные записи двух натуральных чисел. Программа должна найти наибольший общий делитель этих чисел и вывести на консоль его десятичную запись. В исполняемом классе, объектом которого является эта программа, должен быть определен метод, вычисляющий наибольший общий делитель передаваемых ему при вызове двух аргументов.

**40.** Программа должна вычислить значение выражения:

$$\frac{2 \cdot 3! + 3 \cdot 8!}{6! + 4!}.$$

В исполняемом классе, объектом которого является эта программа, должен быть определен метод, вычисляющий факториал передаваемого ему при вызове аргумента. Разработайте такую программу.

**41.** Пользователю нужна консольная программа, которой он при запуске в командной строке мог бы передавать два аргумента, обозначающие начало и конец некоторого диапазона значений натуральных чисел. Программа должна вывести все простые числа, содержащиеся в указанном диапазоне. В исполняемом классе, объектом которого является эта

программа, должен быть определен метод, выясняющий, является ли переданное ему при вызове натуральное число простым. Создайте такую программу.

**42.** Разработайте консольную программу, которой пользователь при запуске в командной строке передает два аргумента, представляющие собой корректные десятичные записи двух натуральных чисел. Программа должна найти наименьшее общее кратное этих чисел и вывести на консоль его десятичную запись. В исполняемом классе, объектом которого является эта программа, должен быть определен метод, вычисляющий наименьшее общее кратное передаваемых ему при вызове двух аргументов.

**43.** Пользователю нужна консольная программа, которой он при запуске в командной строке мог бы передать два аргумента, обозначающие начало и конец некоторого отрезка ряда натуральных чисел. Программа должна вывести все числа из этого отрезка, являющиеся целыми степенями числа 2. В исполняемом классе, объектом которого является эта программа, должен иметься метод, определяющий, является ли переданное ему при вызове натуральное число целой степенью числа 2.

**44.** Пользователю нужна консольная программа, которой он при запуске в командной строке мог бы передать два аргумента, обозначающие начало и конец некоторого отрезка ряда натуральных чисел. Программа должна вывести все числа из этого отрезка, являющиеся квадратами натуральных чисел. В исполняемом классе, объектом которого является эта программа, должен иметься метод, определяющий, является ли переданное ему при вызове натуральное число квадратом некоторого натурального числа.

**45.** Дан входной текстовый файл `initial.txt`. Программа должна все его четные строки записать в созданный ею файл `even.txt`, а нечетные – в ею же созданный файл `odd.txt`. Разработайте такую программу.

**46.** Дан входной текстовый файл `initial.txt`, содержащий не менее трех строк. Программа должна удалить из него третью строку. Результат должен быть записан в тот же файл. Создайте такую программу.

**47.** Дан входной текстовый файл `initial.txt`, содержащий не менее одной строки. Программа должна найти самую длинную строку этого файла. Затем программа должна вывести на экран консоли эту строку и сообщить, какова ее длина. Разработайте такую программу.

**48.** Программа получает от пользователя сведения о его имени, возрасте, должности и месте работы. Затем она генерирует Веб-страницу, на которой имя пользователя отображается как заголовок первого уровня, а остальные данные – в виде таблицы. Разработайте такую программу.

**49.** Программа получает от пользователя сведения о некотором государстве: название, численность населения, площадь территории, форма правления, столица. Затем программа генерирует одностраничный PostScript-документ, в котором название государства отображается как выразительный заголовок, а остальным сведениям придается форма аккуратно оформленного списка. В нем названия полей данных и значения данных должны быть выделены различными начертаниями шрифта одной и той же гарнитуры. Разработайте такую программу.



**50.** Пользователю нужна консольная программа, которая шифрует набираемые им сообщения (в них употребляются только большие латинские буквы) шифром Цезаря, используя задаваемый пользователем ключ. Значение ключа и текст сообщения программа получает от пользователя в интерактивном режиме, а затем помещает шифротекст в текстовый файл. Шифротекст передается респонденту по открытому каналу связи, а ключ – по секретному каналу. Респондент имеет точно такую же программу. Он ей передает в интерактивном режиме шифротекст и ключ дешифровки (легко вычисляемый им по известному ключу шифрования), а программа помещает дешифрованное сообщение в текстовый файл. Разработайте такую программу.

### **§5. Графический интерфейс пользователя. Разработка графических приложений к операционной системе персонального компьютера**

**51.** Графическое приложение к операционной системе персонального компьютера в клиентской части своего окна содержит однострочное текстовое поле и кнопку с надписью «Обратить». Пользователь вводит в текстовое поле произвольную строку. После щелчка по кнопке в текстовом поле исчезает прежняя запись, но появляется запись, полученная из прежней путем чтения «справа налево». Разработайте такое графическое приложение.

**52.** Графическое приложение к операционной системе персонального компьютера в клиентской части своего окна содержит однострочное текстовое поле, в которое пользователь вводит последовательность чисел, разделяя ее члены пробелами. Затем пользователь с помощью имеющегося в его графическом интерфейсе переключателя выбирает, наибольший или наименьший член введенной последовательности надо найти. После щелчка по кнопке с надписью «Найти» в отдельном однострочном текстовом поле пользователь получает найденный по его требованию элемент последовательности. Разработайте такое графическое приложение.

**53.** Графическое приложение содержит выпадающий список с названиями столиц нескольких государств. Когда пользователь выбирает одну из столиц и щелкает по имеющейся в интерфейсе кнопке с надписью «Указать государство», в отдельном однострочном текстовом поле появляется название соответствующей страны. Разработайте такое графическое приложение.

**54.** Графическое приложение дает пользователю возможность ввести два числа в предназначенные для этого однострочные текстовые поля (по одному полю для каждого вводимого числа). В окне приложения имеется группа флажков «Вычислить», содержащая флажки «сумму», «разность», «произведение» и «частное». В зависимости от того, какие из указанных флажков пользователь установит, производятся соответствующие вычисления. Их результаты выводятся в предназначенное для этого многострочное текстовое поле. Вычисления начинаются после щелчка по кнопке «Произвести вычисления». Разработайте такое графическое приложение.

**55.** Графическое приложение «Простейший тестовый редактор» содержит многострочную текстовую область, а также две кнопки – «Открыть файл...» и «Сохранить файл...». В текстовой области пользователь может набирать тексты. По щелчку на кнопке «Сохранить файл...» по-

является диалоговое окно, дающее пользователю возможность указать имя файла, в который сохраняется содержимое текстовой области, и место, занимаемое этим файлом в файловой системе. По щелчку на кнопке «Открыть файл...» появляется диалоговое окно, в котором пользователь может выбрать из файловой системы файл, текстовое содержимое которого затем отображается в текстовой области. Создайте такое графическое приложение.

*Продолжение следует: к §5 будут добавлены задачи 56-61.*

### 3. ТЕХНОЛОГИИ СКРИПТОВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ТЕХНОЛОГИЯ Python

#### §6. Разработка Веб-приложений с помощью технологии Python

**62.** Как известно из курса высшей алгебры, *система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)*, состоящая из двух уравнений, каждое из которых содержит две неизвестные, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

Символами  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$  и  $a_{22}$  обозначены числа – *коэффициенты левых частей уравнений*, образующие *главную матрицу*  $A$  системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Символы  $b_1$  и  $b_2$  обозначают числа – *правые части уравнений*, образующие *столбец правых частей*  $B$ :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Буквами  $x_1$  и  $x_2$  обозначены неизвестные, в нахождении значений которых и состоит задача решения СЛАУ. Неизвестные образуют *столбец неизвестных*  $X$ :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

В *матричном виде* СЛАУ записывается так:  $AX=B$ .

Определитель главной матрицы СЛАУ называется *главным определителем* СЛАУ и обозначается буквой  $\Delta$ :  $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ . Если первый столбец главной матрицы СЛАУ заменить столбцом правых частей и вычислить определитель образовавшейся матрицы, то полученное число называется *первым вспомогательным определителем* СЛАУ и обозначается  $\Delta_1$ :  $\Delta_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$ . Аналогично получается и *второй вспомогательный определитель* СЛАУ, обозначаемый  $\Delta_2$ . Разница состоит только лишь в том, что для нахождения второго вспомогательного определи-

теля столбцом правых частей заменяется не первый, а второй столбец главной матрицы СЛАУ:  $\Delta_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$ .

Если главный определитель СЛАУ отличен от нуля, то ее решение существует и единственно. Оно может быть найдено по *правилу Крамера* путем вычисления по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Эти формулы называются *формулами Крамера*.

Разработайте Веб-сервис «Решение СЛАУ 2×2 по правилу Крамера», с помощью которого пользователь мог бы, введя элементы главной матрицы и столбца правых частей СЛАУ, состоящей из двух уравнений, каждое из которых содержит две неизвестные, получить вычисленное по формулам Крамера единственное решение. Если вычислить компоненты решения по указанным формулам невозможно (определитель главной матрицы равен нулю), пользователь должен получить сообщение об этом. Вычисления должны производиться на стороне Веб-сервера.

**63.** К квадратным матрицам иногда приходится применять операцию *минорирования*, состоящую в том, что из матрицы вычеркивается одна строка и один столбец. Пусть дана матрица  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$  ( $n$  – натуральное число, не меньшее, чем 2). Договоримся символом  $A_{\min}^{ij}$  обозначать результат минорирования матрицы  $A$  путем вычеркивания  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца (значение каждого из индексов  $i$  и  $j$  есть натуральное число, не большее, чем  $n$ ). Минорная матрица  $A_{\min}^{ij}$  – тоже квадратная, но порядок ее равен  $n - 1$ .

Между элементами  $a_{ij}$  исходной матрицы  $A$  порядка  $n$  (их количество равно  $n^2$ ) и результатами минорирования  $A_{\min}^{ij}$  (их количество также равно  $n^2$ ) можно установить взаимно-однозначное соответствие: каждому элементу исходной матрицы соответствует результат минорирования путем вычеркивания этого элемента вместе с его строкой и столбцом, а каждому результату минорирования соответствует элемент, стоящий в исходной матрице на пересечении той строки и того столбца, которые были вычеркнуты при минорировании.

Ниже для примера приведена квадратная матрица третьего порядка  $A$  и два различных результата ее минорирования:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad A_{\min}^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad A_{\min}^{31} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Разработайте Веб-сервис «Минорирование квадратных матриц», с помощью которого пользователь, вводя элементы исходной квадратной матрицы произвольного порядка, не меньшего, чем 2, и задавая номер строки и номер столбца, путем вычеркивания которых исходная матрица должна быть минорирована, получал бы результат минорирования. Преобразования данных должны производиться на стороне Веб-сервера.