1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Высказывания и формулы логики высказываний

Теоретические сведения

Логика высказываний изучает высказывания. Можно сказать иными словами, что *объектом* изучения логики высказываний являются высказывания. В качестве синонима слова «высказывание» употребляются следующие слова: «утверждение», «суждение», «предложение», «пропозиция». Во избежание путаницы мы будем стараться употреблять только термин «высказывание».

Определение (*определение высказывания*)***:*** Высказыванием будем называть такую языковую конструкцию, о которой имеет смысл говорить, что она либо истинна, либо ложна, но не истинна и ложна одновременно.

Всякое высказывание обязательно либо истинно, либо ложно.

Например, языковая конструкция «Слон есть млекопитающее животное» – это высказывание (притом, истинное). Языковая конструкция «Всякий треугольник имеет четыре вершины» – это тоже высказывание (притом, ложное). Языковая конструкция «Есть ли жизнь на Марсе?» – это не высказывание (ибо самой этой конструкции не может быть приписана ни ее истинность, ни ее ложность).

Высказывания будем обозначать малыми или большими латинскими буквами (возможно, с индексами).

Логику высказываний интересуют не все свойства высказываний, а только их *логическая сущность*, представленная двумя аспектами: *логическим значением* высказываний и *логической структурой* высказываний. Можно сказать иными словами, что *предметом* изучения логики высказываний являются логические значения и логическая структура высказываний.

Определение (*определение логического значения высказывания*)***:*** Логическое значение высказывания a обозначается $\lambda(a)$ и определяется следующим образом:

$$\lambda(a) = \begin{cases} 0, \text{ если высказывание } a \text{ – ложно.} \\ 1, \text{ если высказывание } a \text{ – истинно.} \end{cases}$$

Символ «0» в этом определении обозначает не число «нуль», а используется в качестве сокращения слова «ложь». Символ «1» тоже не обозначает единицу, а используется для сокращения слова «истина». В целом получается, что каждое высказывание имеет логическое значение, и это логическое значение – одно из двух: либо 0, либо 1.

По логической структуре высказывания делятся на простые и составные (сложные).

Определение (*определение простого высказывания*)***:*** Высказывание называется простым, если никакая его часть высказыванием не является.

Например, высказывание «Адам – мужчина» – простое (притом, истинное). Отметим, впрочем, что высказывания оказываются или не оказываются простыми *не вообще*, а в рамках *конкретного* рассмотрения. Например, иногда высказывание «Иванов – инженер-технолог» можно рассматривать как простое, а иногда (при более пристальном рассмотрении) можно заметить в нем две части, каждая из которых является высказыванием: «Иванов – инженер» и «Иванов – технолог». Поэтому иногда понятию «простое высказывание» дается несколько иное определение, чем то, которое было дано выше.

Определение (*определение простого высказывания*)**:** В рамках каждого конкретного рассмотрения высказывание считается простым, если его части в качестве высказываний не рассматриваются.

В любом случае, с точки зрения наличия логической структуры, простые высказывания считаются бесструктурными, то есть логической структуры не имеющие. Логическая сущность простого высказывания исчерпывается его логическим значением – логической структуры у простого высказывания нет.

Определение (*определение составного высказывания*)**:** Высказывание называют составным (сложным), если оно не является (или в рамках конкретного рассмотрения не считается) простым.

Например, высказывание «Ангелина не только хорошо учится, но и хорошо поет» может рассматриваться как содержащее две части, сами являющиеся высказываниями: «Ангелина хорошо учится» и «Ангелина хорошо поет». Поэтому исходное высказывание может считаться составным.

Логическая сущность составного высказывания представлена и его логическим значением, и логическими значениями всех выделяемых в нем высказываний, и *способом*, которым эти высказывания объединяются в исходное составное высказывание (то есть его логической структурой). Кроме того, выделяемые в составном высказывании части-высказывания вовсе не должны все и всегда оказываться простыми – среди них также могут встречаться составные высказывания.

Главным аспектом логической сущности любого высказывания является его логическое значение. При этом ясно: логическое значение высказывания зависит и от его логической структуры, и от логических значений членов этой структуры, и от других причин, не входящих в компетенцию логики высказываний.

Логическое значение любого *простого* высказывания *всегда* определяется *только* причинами, *не входящими* в компетенцию логики высказываний. Например, логическое значение простого высказывания «Мария – мужчина» средствами *одной только* логики высказываний не может быть установлено.

Упражнения

1. Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 – пропозициональные переменные. Определите, какие из предложенных ниже символьных конструкций являются формулами логики высказываний, а какие – не являются (если следовать точному определению формулы логики высказываний и не принимать во внимание никаких упрощающих запись соглашений):

$F_1 \equiv (x_1 x_2)$;
$F_2 \equiv (((x_1 \leftrightarrow x_2) \wedge x_3) \to (x_1 \vee x_3))$;
$F_3 \equiv ((\neg x_1 \to x_2) \to (x_3 \wedge (x_2 \vee x_4)))$;
$F_4 \equiv ((x_1 \vee \neg x_2) \to (x_3 \neg x_4))$;
$F_5 \equiv (x_1 \to (x_2 \wedge x_3 \to \neg x_1))$;
$F_6 \equiv \neg((\neg x_1 \wedge \neg x_2) \to (x_1 \vee (x_3 \wedge \neg x_4)))$;
$F_7 \equiv ((x_1 \vee x_2) \to (\neg x_1 \wedge \neg x_3 \wedge (x_2 \leftrightarrow x_3)))$;
$F_8 \equiv x_1 \to x_2 \to x_3$;
$F_9 \equiv (\neg\neg x_1 \to x_1)$;
$F_{10} \equiv ((x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_1))$;
$F_{11} \equiv (((x_1 \wedge x_2) x_3) \to \neg x_4)$;
$F_{12} \equiv (((x_1 \wedge (\neg x_2 \to x_3)) \vee ((\neg x_1 \leftrightarrow x_3) \wedge \neg x_2)))$.

2. Пусть x_1, x_2 и x_3 – пропозициональные переменные. Путем составления таблиц истинности определите, какие из предложенных ниже формул логики высказываний являются выполнимыми, какие – опровержимыми, какие – тавтологиями, какие – противоречиями (внешние скобки у формул для упрощения записи опущены):

$F_1 \equiv (x_1 \to x_2) \to ((x_1 \to \neg x_2) \to \neg x_1)$;
$F_2 \equiv ((x_1 \to x_2) \to x_1) \to x_2$;
$F_3 \equiv (x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1)) \wedge ((\neg x_2 \to x_1) \vee x_2)$;
$F_4 \equiv ((x_1 \wedge \neg x_2) \to x_2) \to (x_1 \to x_2)$;
$F_5 \equiv x_1 \wedge (x_2 \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2))$;
$F_6 \equiv (((x_1 \to x_2) \to x_2) \to x_2) \to x_2$;
$F_7 \equiv (((x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)) \vee \neg x_3) \vee x_2$;
$F_8 \equiv (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)) \to ((x_3 \to (x_1 \to x_2)) \leftrightarrow (x_2 \to (x_3 \to x_1)))$;
$F_9 \equiv (((x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow (x_1 \leftrightarrow x_3)) \leftrightarrow (x_2 \leftrightarrow x_3)) \leftrightarrow x_1$;
$F_{10} \equiv \neg((\neg x_3 \to \neg(x_1 \to \neg(x_2 \to x_3))) \to \neg(x_1 \to \neg x_2))$;
$F_{11} \equiv ((x_1 \vee \neg x_2) \to x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$.

3. Пусть x, x_1, x_2 и x_3 – пропозициональные переменные. Путем составления таблиц истинности докажите, что все предложенные ниже формулы являются тавтологиями (это – важнейшие тавтологии логики высказываний). Для упрощения записи опущены внешние скобки у формул:

$F_1 \equiv x \vee \neg x$ – закон исключенного третьего;
$F_2 \equiv \neg(x \wedge \neg x)$ – закон непротиворечия;
$F_3 \equiv \neg\neg x \leftrightarrow x$ – закон двойного отрицания;
$F_4 \equiv x \leftrightarrow x$ – закон тождества;
$F_5 \equiv (x_1 \to x_2) \leftrightarrow (\neg x_2 \to \neg x_1)$ – закон контрапозиции;
$F_6 \equiv ((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)$ – правило цепного заключения;
$F_7 \equiv (x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \leftrightarrow \neg x_2)$ – закон противоположности;
$F_8 \equiv (x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow (x_2 \wedge x_1)$ – коммутативность конъюнкции;
$F_9 \equiv (x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (x_2 \vee x_1)$ – коммутативность дизъюнкции;
$F_{10} \equiv ((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3) \leftrightarrow (x_1 \wedge (x_2 \wedge x_3))$ – ассоциативность конъюнкции;
$F_{11} \equiv ((x_1 \vee x_2) \vee x_3) \leftrightarrow (x_1 \vee (x_2 \vee x_3))$ – ассоциативность дизъюнкции;
$F_{12} \equiv (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)) \leftrightarrow ((x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3))$ – дистрибутивность конъюнкции по отношению к дизъюнкции;
$F_{13} \equiv (x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)) \leftrightarrow ((x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3))$ – дистрибутивность дизъюнкции по отношению к конъюнкции;
$F_{14} \equiv (x \wedge x) \leftrightarrow x$ – идемпотентность конъюнкции;
$F_{15} \equiv (x \vee x) \leftrightarrow x$ – идемпотентность дизъюнкции;
$F_{16} \equiv (x_1 \to x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \vee x_2)$ – выражение импликации через отрицание и дизъюнкцию;
$F_{17} \equiv (x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow ((x_1 \to x_2) \wedge (x_2 \to x_1))$ – выражение эквивалентности через импликацию и конъюнкцию;
$F_{18} \equiv (x_1 \wedge (x_2 \vee x_1)) \leftrightarrow x_1$ – первый закон поглощения;
$F_{19} \equiv (x_1 \vee (x_2 \wedge x_1)) \leftrightarrow x_1$ – второй закон поглощения;
$F_{20} \equiv \neg(x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \vee \neg x_2)$ – первый закон де Моргана;
$F_{21} \equiv \neg(x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \wedge \neg x_2)$ – второй закон де Моргана;
$F_{22} \equiv (x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \to x_2)$ – выражение дизъюнкции через отрицание и импликацию.

4. Пусть x, x_1, x_2 и x_3 – пропозициональные переменные. Путем составления таблиц истинности докажите, что все предложенные ниже формулы являются тавтологиями (для упрощения записи опущены внешние скобки у формул):

$F_1 \equiv x_1 \to (x_2 \to x_1)$;
$F_2 \equiv (x_1 \to x_2) \to ((x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3))$;
$F_3 \equiv x_1 \to (x_2 \to (x_1 \wedge x_2))$;
$F_4 \equiv x_1 \to (x_1 \vee x_2)$;
$F_5 \equiv (x_1 \wedge x_2) \to x_1$;
$F_6 \equiv (x_1 \to (x_2 \wedge x_3)) \leftrightarrow ((x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \to x_3))$;
$F_7 \equiv ((x_1 \to x_2) \wedge (x_1 \to \neg x_2)) \leftrightarrow \neg x_1$;
$F_8 \equiv (x_1 \to x_3) \to ((x_2 \to x_3) \to ((x_1 \vee x_2) \to x_3))$;
$F_9 \equiv (x_1 \to x_2) \to ((x_1 \to \neg x_2) \to \neg x_1)$;
$F_{10} \equiv \neg\neg x \to x$;
$F_{11} \equiv (x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_1)$;
$F_{12} \equiv (x_1 \to x_2) \to ((x_2 \to x_1) \to (x_1 \leftrightarrow x_2))$;
$F_{13} \equiv ((x_1 \to x_2) \to x_1) \to x_1$;
$F_{14} \equiv (x_1 \leftrightarrow x_2) \to (x_1 \to x_2)$;
$F_{15} \equiv (x_1 \to x_3) \to ((x_1 \vee x_2) \to (x_3 \vee x_2))$;
$F_{16} \equiv (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \leftrightarrow ((x_1 \wedge x_2) \to x_3)$;
$F_{17} \equiv (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \leftrightarrow (x_2 \to (x_1 \to x_3))$;
$F_{18} \equiv (\neg x \to x) \to x$;
$F_{19} \equiv ((x_1 \wedge x_2) \to x_3) \to (x_1 \wedge (x_2 \to x_3))$.

5. Пусть x_1, x_2, x_3 и x_4 – пропозициональные переменные. Путем составления таблиц истинности докажите, что все предложенные ниже формулы являются тавтологиями (принимайте типичные соглашения для упрощения записи формул):

$F_1 \equiv (\overline{x_1} \to x_2\overline{x_2}) \to x_1$;
$F_2 \equiv (\overline{x_1} \to x_2)(\overline{x_1} \to \overline{x_2}) \to x_1$;
$F_3 \equiv (x_1\overline{x_2} \to x_3\overline{x_3}) \to (x_1 \to x_2)$;
$F_4 \equiv x_1(x_1 \to x_2) \to x_2$;
$F_5 \equiv (x_1 \to x_2)\overline{x_2} \to \overline{x_1}$;
$F_6 \equiv (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \to (x_1 \to x_3)$;
$F_7 \equiv (x_1 \to x_2)(x_3 \to x_4)\overline{x_2 \vee x_4} \to \overline{x_1 \vee x_3}$;
$F_8 \equiv (x_1 \to x_2)(x_3 \to x_4) \to (x_1x_3 \to x_2x_4)$;
$F_9 \equiv ((x_1 \to x_2) \vee x_3) \leftrightarrow (x_1 \to (x_2 \vee x_3))$;
$F_{10} \equiv x_1 \to (x_2 \to ((x_1 \vee x_2) \to x_1x_2))$.

6. Докажите справедливость правила вывода, называемого в логике высказываний «modus ponens» (сокращенно «M. P.»): если формулы F и $F \to G$ суть тавтологии, то и формула G есть тавтология.