ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ: ВЫСКАЗЫВАНИЯ И ПРЕДИКАТЫ

1. Пусть $P(x, y)$ – двухместный предикат «Окружность x описана вокруг треугольника y». Прочитайте следующие высказывания, определите значения их истинности, постройте отрицания данных высказываний:

1) $\forall x\ \forall y\ P(x, y)$;
2) $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$;
3) $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$.

Решение: Рассмотрим первое высказывание. Оно гласит: «Для любой окружности x и для любого треугольника y верно то, что эта окружность описана вокруг данного треугольника». Это высказывание – ложное, ведь всегда можно начертить окружность и построить такой треугольник, вокруг которого эта окружность не описана. Итак, *логическое значение* первого высказывания есть *ложь*:

$$\lambda(\forall x\ \forall y\ P(x, y)) = 0$$

Для построения отрицания первого высказывания воспользуемся общим *правилом построения отрицаний*: все кванторы заменить на противоположные, а предикат заменить его отрицанием. Получаем отрицание первого высказывания:

$$\exists x\ \exists y\ \overline{P(x, y)}$$

Отрицание первого высказывания гласит: «Существует такая окружность x и существует такой треугольник y, для которых верно то, что данная окружность не описана вокруг этого треугольника». Поскольку само первое высказывание является ложным, то его отрицание будет *истинным*:

$$\lambda(\exists x\ \exists y\ \overline{P(x, y)}) = 1$$

Рассмотрим теперь второе высказывание. Оно гласит: «Существует такая окружность x, что для любого треугольника y верно то, что эта окружность описана вокруг данного треугольника». Это высказывание – ложное. Ведь какая бы ни была взята окружность, всегда найдется треугольник, вокруг которого она не будет описанной. Итак, *логическое значение* второго высказывания есть *ложь*:

$$\lambda(\exists x\ \forall y\ P(x, y)) = 0$$

Для построения отрицания второго высказывания пользуемся общим *правилом построения отрицаний*: все кванторы заменяем на противоположные, а предикат заменяем его отрицанием. Получаем отрицание второго высказывания:

$$\forall x\ \exists y\ \overline{P(x, y)}$$

Отрицание второго высказывания гласит: «Для любой окружности x найдется такой треугольник y, вокруг которого эта окружность не описана». Поскольку второе высказывание является ложным, его отрицание *истинно*:

$$\lambda(\forall x\ \exists y\ \overline{P(x, y)}) = 1$$

Наконец, рассмотрим третье высказывание. Оно гласит: «Для любой окружности x найдется такой треугольник y, вокруг которого эта окружность описана». Это высказывание истинно, ведь, действительно, в любую окружность можно вписать треугольник (и даже не один). Поэтому для любой окружности существует треугольник (и даже не один), вокруг которого она описана. Итак, *логическое значение* третьего высказывания есть *истина*:

$$\lambda(\forall x\ \exists y\ P(x,y)) = 1$$

Отрицание третьего высказывания строим, как и раньше, по *правилу построения отрицаний*: все кванторы заменяем напротивоположные, а предикат заменяем его отрицанием. Получаем:

$$\exists x\ \forall y\ \overline{P(x,y)}$$

Отрицание третьего высказывания гласит: «Существует такая окружность x, которая не описана вокруг никакого треугольника y». Это, конечно же, – ложь. Ведь какой бы ни была окружность, всегда найдется (и даже не один) вписанный в нее треугольник, а значит она будет вокруг него описанной. Итак, логическое значение отрицания третьего высказывания есть *ложь*:

$$\lambda(\exists x\ \forall y\ \overline{P(x,y)}) = 0$$

На этом решение предложенной задачи можно считать завершенным.

2. Сформулируйте отрицания следующих высказываний в утвердительной форме (то есть так, чтобы отрицание не начиналось со слов «не» или «неверно, что»):

1) в любой стране есть регион, в каждом городе которого есть дом, все жители которого не курят;

2) существует университет, на каждом факультете которого есть кафедра, все преподаватели которой не выше 180 сантиметров ростом;

3) в каждом магазине есть отдел, в котором по крайней мере на одной полке все товары – иностранного производства;

4) существует университет, на каждом факультете которого есть не менее, чем одна учебная группа, в которой учатся по меньшей мере две девушки;

5) на каждом телевизионном канале хотя бы в одной передаче участвуют только такие люди, у которых есть собственный автомобиль.

Решение: 1) Введем предикат $P(x,y,z,t,s)$, гласящий: «Житель s дома t в городе z региона y страны x не курит». Тогда формально-логически высказывание «В любой стране есть регион, в каждом городе которого есть дом, все жители которого не курят» может быть записано так:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists t\ \forall s\ P(x,y,z,t,s)$$

Применяем к этой формуле правило построения отрицаний: заменяем все кванторы на противоположные, а предикат – на его отрицание. Получаем в виде формулы отрицание исходного высказывания:

$$\exists x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ \exists s\ \overline{P(x,y,z,t,s)}$$

На естественном языке это отрицание исходного высказывания гласит: «Существует страна, в любом регионе которой имеется город, в любом доме которого найдется курящий житель».

2) Введем предикат $P(x, y, z, t)$, гласящий: «Преподаватель t кафедры z факультета y университета x не выше 180 сантиметров ростом». Тогда формально-логически высказывание «Существует университет, на каждом факультете которого есть кафедра, все преподаватели которой не выше 180 сантиметров ростом» записывается так:

$$\exists x\ \forall y\ \exists z\ \forall t\ P(x, y, z, t)$$

Применив к этой формуле правило построения отрицаний (то есть заменив все кванторы на противоположные, а предикат – на его отрицание), получим в виде формулы отрицание исходного высказывания:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \exists t\ \overline{P(x, y, z, t)}$$

На естественном языке это отрицание исходного высказывания гласит: «В любом университете найдется факультет, на любой кафедре которого имеется преподаватель, рост которого больше 180 сантиметров».

3) Перефразируем исходное высказывание, полностью сохранив его смысл: «В каждом магазине существует отдел, в котором существует полка, на которой для любого товара верно, что он – иностранного производства». Введем теперь предикат $P(x, y, z, t)$, гласящий: «Товар t, лежащий на полке z в отделе y магазина x, есть товар иностранного производства». Тогда исходное высказывание можно представить следующей логической формулой:

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ \forall t\ P(x, y, z, t)$$

Применение к этой формуле правила построения отрицаний дает нам отрицание исходного высказывания на формально-логическом языке:

$$\exists x\ \forall y\ \forall z\ \exists t\ \overline{P(x, y, z, t)}$$

Остается только перевести это отрицание исходного высказывания на естественный язык: «Существует магазин, в любом отделе которого на любой полке найдется товар отечественного производства».

4) Перефразируем исходное высказывание, полностью сохранив его смысл: «Существует университет, на любом факультете которого существует учебная группа, в которой учатся две девушки или более». Введем теперь предикат $P(x, y, z)$, гласящий: «В учебной группе z на факультете y университета x учатся две девушки или более». Теперь исходное высказывание можно представить логической формулой:

$$\exists x\ \forall y\ \exists z\ P(x, y, z)$$

Применяем правило построения отрицаний:

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ \overline{P(x, y, z)}$$

Переводим это отрицание исходного высказывания на естественный язык: «В любом университете существует факультет, в любой группе на котором не найдется и двух девушек».

5) Перефразируем исходное высказывание с сохранением его смысла: «На любом телевизионном канале существует передача, все участники которой имеют собственный автомобиль». Введем предикат $P(x, y, z)$, означающий

следующее: «Участник z передачи y на телевизионном канале x имеет собственный автомобиль». Теперь можно исходное высказывание представить логической формулой:

$$\forall x \; \exists y \; \forall z \; P(x, y, z)$$

По правилу построения отрицаний легко строится отрицание этого высказывания:

$$\exists x \; \forall y \; \exists z \; \overline{P(x, y, z)}$$

Затем отрицание исходного высказывания переводим на естественный язык: «Существует такой телевизионный канал, в любой передаче которого имеется хотя бы один участник, не имеющий собственного автомобиля».