1. МНОЖЕСТВА И ОТНОШЕНИЯ

§1. Основные понятия. Операции над множествами

1. Множество $A=\{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$ задано путем перечисления его элементов. Укажите истинные и ложные среди предложенных высказываний: $1\in A$, $3\in A$, $\{1\}\in A$, $\{1,2\}\in A$.

2. Пусть A – множество всех простых чисел, не больших, чем 10, а B – множество всех целых решений неравенства $x^2-x-30<0$. Задайте каждое из указанных множеств путем перечисления его элементов.

3. Множество $A=\{x\,|\,x\in N, x\,\vdots\,2, x\,\vdots\,5\}$ задано путем указания общего свойства всех его элементов. Задайте множество A путем квазиперечисления элементов.

4. Пусть символ $s(x)$ обозначает сумму цифр десятичной записи числа x. Множество $B=\{x\,|\,x\in N, s(x)\,\vdots\,3\}$ задано путем указания свойства, общего для всех его элементов. Задайте множество B путем квазиперечисления элементов.

5. Множество $C=\{(x;y)\,|\,x\in R, y\in R, y=2x+1, y=-3x+6\}$ задано путем указания общего свойства всех его элементов. Постройте задание множества C, используя способ перечисления элементов.

6. Множество $D=\{(x;y)\,|\,x\in R, y\in R, x^2+y^2\geqslant 1\}$ задано путем указания общего свойства всех его элементов. Считая, что элементы множества D суть точки координатной плоскости, абсциссы которых суть x, а ординаты суть y, изобразите множество D.

7. Множество $E=\{(x;y)\,|\,x\in R, y\in R, |x|+|y|<2\}$ задано способом, состоящим в указании свойства, общего для всех его элементов. Считая, что элементы множества E – это точки координатной плоскости, абсциссы которых суть x, а ординаты суть y, изобразите множество E.

8. Множество $F=\{0,1,8,27,64,125,\ldots\}$ задано путем квазиперечисления его элементов. Задайте множество F путем указания общего для всех его элементов свойства.

9. Множество $A=\{\{1\},2,\{1,2\}\}$ задано путем перечисления его элементов. Из приведенных далее двенадцати высказываний выберите все те, которые являются истинными: $2\in A$, $2\subseteq A$, $\{2\}\in A$, $\{2\}\subseteq A$, $1\in A$, $1\subseteq A$, $\{1\}\in A$, $\{1\}\subseteq A$, $\{1,2\}\in A$, $\{1,2\}\subseteq A$, $\{\{1,2\}\}\in A$, $\{\{1,2\}\}\subseteq A$.

10. Даны множества A и B: $A=\{x\in R\,|\,\sqrt{x+2}\geqslant x\}$, $B=\{x\in R\,|\,x+2\geqslant x^2\}$. Установите, какие из следующих высказываний истинны: $A=B$, $A\subset B$, $A\subseteq B$, $A\supset B$, $A\supseteq B$.

11. Даны множества A и B: $A=\{x\in R\,|\,\sqrt{x+2}\leqslant x\}$, $B=\{x\in R\,|\,x+2\leqslant x^2\}$. Установите, какие из следующих высказываний истинны: $A=B$, $A\subset B$, $A\subseteq B$, $A\supset B$, $A\supseteq B$.

12. Даны множества $A=\{x\in R\,|\,\mathrm{tg}\,3x=\mathrm{tg}\,5x\}$ и $B=\{x\in R\,|\,\sin 2x=0\}$. Установите, какие из следующих высказываний истинны: $A=B$, $A\subset B$, $A\subseteq B$, $A\supset B$, $A\supseteq B$.

13. Даны множество $A=\{x\in R\,|\,\log_2(x+2)+\log_2(3x-4)=4\}$ и множество $B=\{x\in R\,|\,(x+2)(3x-4)=16\}$. Установите, какие из следующих утверждений справедливы: $A=B$, $A\subset B$, $A\subseteq B$, $A\supset B$, $A\supseteq B$.

14. Множество $A=\{x\in R\,|\,\log_{x^2-x-2}(\cos x-\cos 3x)=\log_{x^2-x-2}(\sin 2x)\}$ и множество $B=\{x\in R\,|\,\cos x-\cos 3x=\sin 2x\}$ исследуйте на предмет выбора из предложенных дальше суждений о них тех, которые являются справедливыми: $A=B$, $A\subset B$, $A\subseteq B$, $A\supset B$, $A\supseteq B$.

15. Даны множество $A=\{(p;q)\,|\,p\in Z, q\in Z, p^2-4q^2=4pq\}$ и множество $B=\{(0;0)\}$. Среди приведенных далее высказываний укажите истинные: $A=B$, $A\subset B$, $A\subseteq B$, $A\supset B$, $A\supseteq B$.

16. Даны множество $A=\{n\,|\,n\in N,\ (3n+4)\,\vdots\,5\}$ и также еще множество $B=\{x\,|\,x=5m+2,\ m\in Z,\ m\geqslant 0\}$. Укажите справедливые среди предложенных утверждений: $A=B$, $A\subset B$, $A\subseteq B$, $A\supset B$, $A\supseteq B$.

17. Множества A_1, A_2 и A_3 определены следующими соотношениями: $A_1=\{x\,|\,x=4n,\ n\in N\}$, $A_2=\{x\,|\,x=4n+2,\ n\in N\}$, $A_3=\{x\,|\,x=2n,\ n\in N\}$. Задайте множества $A_1\cup A_2$, $A_1\cap A_3$, $A_2\cap A_3$, $\overline{A}_3$, $\overline{A}_1\setminus\overline{A}_3$, $A_3\setminus A_1$. При этом считайте множество натуральных чисел N универсальным множеством.

18. Докажите, что $A\subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A\cap B=A$.

19. Докажите, что $\forall A,B\colon A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$.

20. Докажите, что равенства $A\cap B=A$ и $A\cup B=B$ равносильны.

21. Множество B таково, что $A\cup B=A$ для любого множества A. Докажите, что множество B является пустым.

22. Докажите, что $(\forall A\colon A\cap B=A) \Rightarrow (B=U)$. Символом U обозначено универсальное множество.

23. Если $A\cup B=U$, а $A\cap B=\varnothing$, то $B=\overline{A}$. Докажите это. Символом U обозначено универсальное множество.

24. Упростите выражение $(A\cap B\cap C\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)$.

25. Выражение $(A\cap B\cap D)\cup(A\cap B\cap C\cap D\cap E)\cup(A\cap D\cap\overline{A})$ приведите к эквивалентному ему, но более простому виду.

26. Для выражения $(A\cap B\cap\overline{C}\cap\overline{D})\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)\cup(C\cap D)$ найдите равносильное ему, но как можно более простое выражение.